



**ESTUDIOS MATEMÁTICOS**  
**NIVEL MEDIO**  
**PRUEBA 2**

Viernes 6 de noviembre de 2009 (mañana)

1 hora 30 minutos

---

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

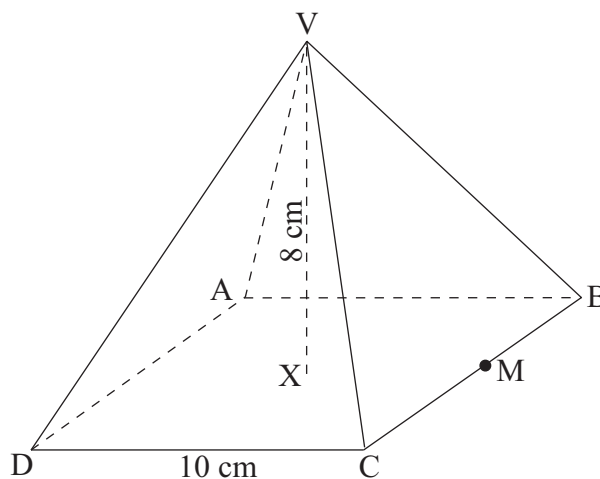
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 16]

**Apartado A**

La siguiente figura muestra una pirámide recta de base cuadrada. ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. VX es la altura medida perpendicularmente a la base, y es igual a 8 cm. M es el punto medio de BC.



*la figura no está  
dibujada a escala*

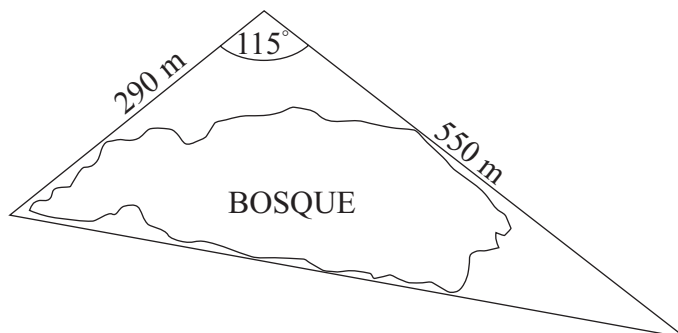
- (a) Escriba la longitud de XM. [1 punto]
- (b) Calcule la longitud de VM. [2 puntos]
- (c) Calcule el ángulo que forma VM con ABCD. [2 puntos]

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

(Pregunta 1: continuación)

### Apartado B

Un camino rodea a un bosque, de modo que conforma los tres lados de un triángulo. Dos de los lados de este triángulo miden 550 m y 290 m. Estos dos lados se encuentran formando un ángulo de  $115^\circ$ . Se muestra a continuación la correspondiente figura.



*la figura no está dibujada a escala*

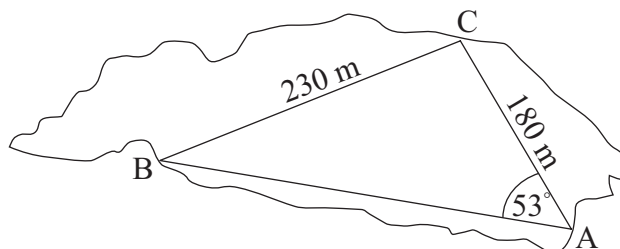
- (a) Calcule la longitud del tercer lado del triángulo. Dé la respuesta redondeando a la decena más próxima.

[4 puntos]

- (b) Calcule el área delimitada por el camino que rodea el bosque.

[3 puntos]

Dentro del bosque, un segundo camino conforma los tres lados de otro triángulo, denominado ABC. El ángulo BAC es igual a  $53^\circ$ , AC mide 180 m y BC mide 230 m.



*la figura no está dibujada a escala*

- (c) Calcule el valor del ángulo ACB.

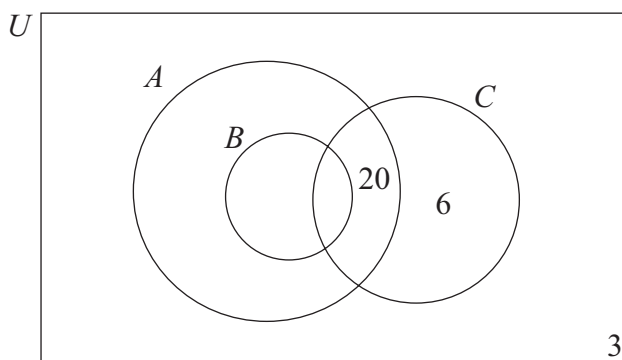
[4 puntos]

2. [Puntuación máxima: 15]

**Apartado A**

El siguiente diagrama de Venn representa a los alumnos que estudian en un colegio Matemáticas ( $A$ ), Ampliación de Matemáticas ( $B$ ) y Física ( $C$ ).

- 50 alumnos estudian Matemáticas
- 38 estudian Física
- 20 estudian Matemáticas y Física, pero no Ampliación de Matemáticas
- 10 estudian Ampliación de Matemáticas, pero no Física
- 12 estudian Ampliación de Matemáticas y Física
- 6 estudian Física, pero no Matemáticas
- 3 no estudian ninguna de estas tres asignaturas.



- (a) Copie y complete el diagrama de Venn **en su hoja de respuestas**. [3 puntos]
- (b) Escriba el número de alumnos que estudian Matemáticas pero no Ampliación de Matemáticas. [1 punto]
- (c) Escriba el número total de alumnos que hay en el colegio. [1 punto]
- (d) Escriba  $n(B \cup C)$ . [2 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

### Apartado B

Se dan las siguientes tres proposiciones

$p$ : Está nevando       $q$ : Las carreteras están abiertas       $r$ : Iremos a esquiar

(a) Escriba la siguiente proposición compuesta en forma simbólica.

“Está nevando y las carreteras no están abiertas.”

[2 puntos]

(b) Escriba con palabras la siguiente proposición compuesta.

$$(\neg p \wedge q) \Rightarrow r$$

[3 puntos]

A continuación se muestra una tabla de verdad incompleta, correspondiente a la proposición compuesta  $(\neg p \wedge q) \Rightarrow r$ .

(c) Copie y complete la tabla de verdad **en su hoja de respuestas**.

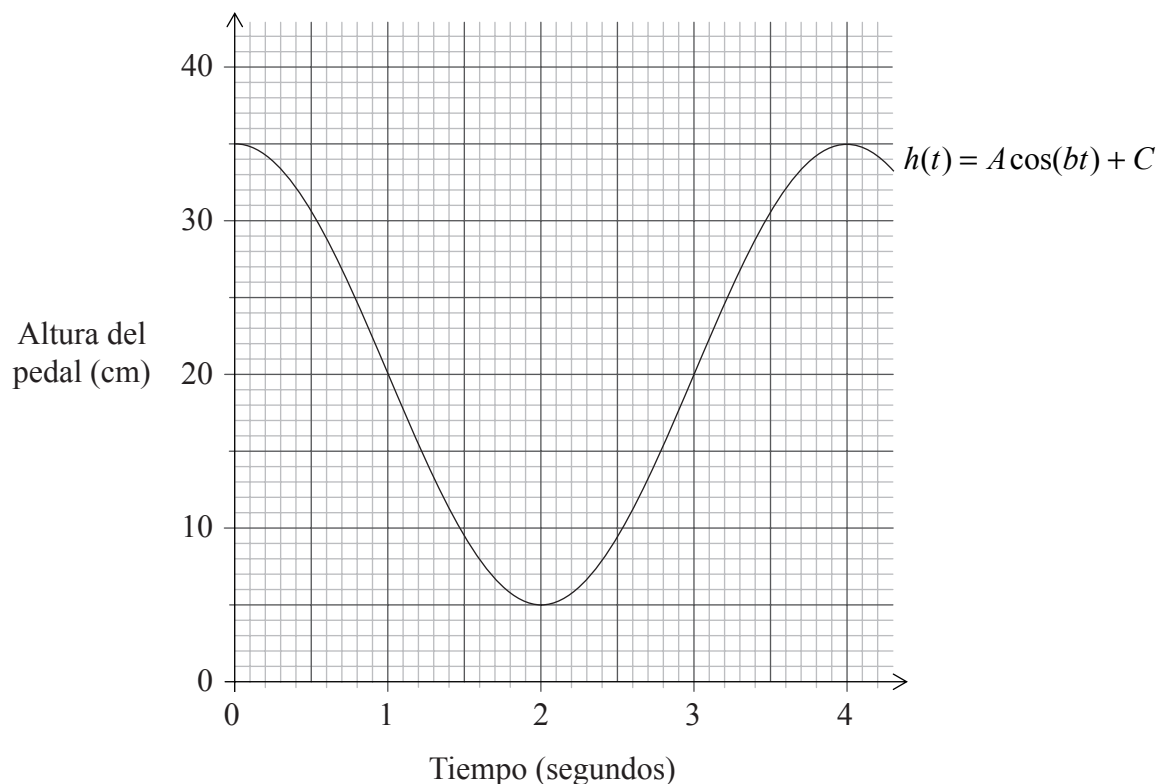
[3 puntos]

$p$	$q$	$r$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \Rightarrow r$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

3. [Puntuación máxima: 14]

La altura,  $h(t)$ , en centímetros, a la que se encuentra el pedal de una bicicleta respecto al suelo en el instante  $t$  segundos viene dada por una función coseno de la forma  $h(t) = A \cos(bt) + C$ .

A continuación se muestra la gráfica de esta función, para  $0 \leq t \leq 4.3$ .



- Escriba la altura máxima del pedal respecto al suelo. [1 punto]
- Escriba la altura mínima del pedal respecto al suelo. [1 punto]
- Halle la amplitud de la función. [2 puntos]
- A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de  $A$  y el de  $C$ . [2 puntos]
- Escriba cuál es el período de la función  $h(t)$ .
  - A partir de lo anterior, halle el valor de  $b$ . [3 puntos]
- Utilice su calculadora de pantalla gráfica para determinar el primer valor de  $t$  para el cual la altura del pedal respecto al suelo es igual a 30 cm. [3 puntos]
- Calcule cuántas vueltas da el pedal en un minuto. [2 puntos]

4. [Puntuación máxima: 21]

**Apartado A**

En una región montañosa parece que hay una relación entre el número de árboles que crecen en la región y el espesor de la capa de nieve en invierno. Se eligen 10 zonas de esta región, y en cada zona se cuentan cuántos árboles hay y se mide el espesor de la capa de nieve. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Número de árboles ( $x$ )	Espesor de la capa de nieve, en cm ( $y$ )
45	30
75	50
66	40
27	25
44	30
28	5
60	35
35	20
73	45
47	25

- (a) Utilice su calculadora de pantalla gráfica para hallar
- (i) la media del número de árboles;
  - (ii) la desviación típica del número de árboles;
  - (iii) la media del espesor de la capa de nieve;
  - (iv) la desviación típica del espesor de la capa de nieve. [4 puntos]

La covarianza,  $S_{xy} = 188,5$ .

- (b) Escriba el valor del coeficiente de correlación momento-producto,  $r$ . [2 puntos]
- (c) Escriba la ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ . [2 puntos]
- (d) Si el número de árboles que hay en una de las zonas es igual a 55, estime cuál será el espesor de la capa de nieve en esa zona. [2 puntos]
- (e) (i) Utilice la ecuación de la recta de regresión para estimar el espesor de la capa de nieve en una zona donde haya 100 árboles.
- (ii) Decida si la respuesta dada en el apartado (e)(i) es una estimación válida del espesor de la capa de nieve en esa zona. Dé una respuesta razonada. [3 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 4: continuación)

### Apartado B

En un estudio en el que participaron 100 alumnos, pareció detectarse una diferencia entre varones y mujeres, cuando se les preguntó por su color de coche preferido. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Se llevó a cabo una prueba de  $\chi^2$ .

	Azul	Rojo	Verde
Varones	14	6	8
Mujeres	31	24	17

(a) Escriba el número total de alumnos varones. [1 punto]

(b) Compruebe que la frecuencia esperada de varones que prefieren coches azules es igual a 12,6. [2 puntos]

El valor calculado de  $\chi^2$  es 1,367.

(c) (i) Escriba para esta prueba la hipótesis nula.

(ii) Escriba el número de grados de libertad.

(iii) Escriba el valor crítico de  $\chi^2$  a un nivel de significación del 5 % .

(iv) Determine si se debería aceptar la hipótesis nula. Dé una respuesta razonada. [5 puntos]



5. [Puntuación máxima: 24]

**Apartado A**

- (a) Dibuje aproximadamente la gráfica de  $y = 2^x$  para  $-2 \leq x \leq 3$ . Indique claramente el lugar donde la curva corta al eje  $y$ . [3 puntos]
- (b) Escriba la ecuación de la asíntota de la gráfica de  $y = 2^x$ . [2 puntos]
- (c) Sobre esos mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente la gráfica de  $y = 3 + 2x - x^2$ . Indique claramente dónde corta la curva al eje  $x$ , y dónde corta al eje  $y$ . [3 puntos]
- (d) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica, resuelva la ecuación  $3 + 2x - x^2 = 2^x$ . [2 puntos]
- (e) Escriba el valor máximo de la función  $f(x) = 3 + 2x - x^2$ . [1 punto]
- (f) Utilice el Cálculo diferencial para comprobar que la respuesta que ha dado en el apartado (e) es correcta. [5 puntos]

**Apartado B**

La curva  $y = px^2 + qx - 4$  pasa por el punto  $(2, -10)$ .

- (a) Utilice esta información para escribir una ecuación que relacione  $p$  y  $q$ . [2 puntos]

La pendiente de la curva  $y = px^2 + qx - 4$  en el punto  $(2, -10)$  es igual a 1.

- (b) (i) Halle  $\frac{dy}{dx}$ .  
(ii) A partir de lo anterior, halle una segunda ecuación que relacione  $p$  y  $q$ . [3 puntos]
- (c) Resuelva las ecuaciones para hallar el valor de  $p$  y el de  $q$ . [3 puntos]